1.2 频率与概率

随机事件的发生具有偶然性，但我们常常会觉察到随机事件发生的可能性是有大小之分的.例如, 在购买福利彩票的活动中，不中奖的可能性远比中大奖的可能性大. 再比如,在一些球类比赛中,裁判先通过抛硬币的方式让双方挑边,以示公平,这种公平的基础是“抛硬币的试验中，出面正面的可能性与出现反面的可能性相等”.既然事件发生的可能性有大小之分，人们自然地想到该用一个数来表征事件发生的可能性大小.这个数就称为该事件的概率.

对于给定的事件，该用哪个数作为它的概率呢？这取决定所研究的随机现象以及事件本身的特殊性,不能一概而论.在概率论的发展历史上，人们针对特定的随机现象提出过不同的概率的定义：概率的古典定义、概率的几何定义、以及概率的频率定义.这些不同的定义都给出了确定事件概率的方法，有其合理性，但有很大的局限性,这些定义只适用于特定的随机现象.为了克服这些局限性，1933年前苏联数学家柯尔莫哥洛夫在综合前人成果的基础上，以最少的几条概率的基本性质提出了概率的公理化定义,这一公理化定义提出后迅速得到举世公认,有了这个定义后,概率论才被正式承认为一个数学分支,并得到迅猛发展.

在本节中，我们先给出概率的频率定义.然后给出概率的公理化定义，概率的公理化定义是概率论中最基本的概念.

1.2.1频率与概率的频率定义

对于可重复的随机现象中的某个事件,我们若对此随机现象进行多次观察或实验,如果事件发生很频繁,则意味着事件发生的可能性大；反之,事件发生很稀少,则意味着事件发生的可能性小.事件发生的频繁程度可以用频率来度量.

定义1.2.2 设为一随机试验，为其中一事件，在相同条件下将独立重复做次，记为事件在这次试验中发生的次数（也叫频数），比值

,

称为事件在这次试验中的频率.

在多次重复试验中,事件发生的频率越大, 表明该事件发生越频繁,这也意味着该事件发生的可能性越大.反过来,如果一个事件发生的可能性越大，那么在多次重复试验中,该事件的频率一般也会越大.因此事件频率的大小可以在一定程度上表征了事件发生可能性的大小.但是我们还不能把事件的频率说成是事件的概率,因为频率不具有“唯一性”，而会有波动.试验重复的次数不同,频率一般会不同,对于同样进行次试验的多组试验,频率也会有差异.

长期实践经验表明,随着试验次数的增加, 频率会呈现出稳定性,频率的波动幅度越来越小，且逐渐稳定于某一个常数, 我们称这个常数为频率的稳定值.这个频率的稳定值是唯一的,是由事件本身决定的,因此把这个稳定值定义为事件的概率是客观的,合理的.这就是概率的频率定义.

这种定义概率的方法有其合理性,但其缺点是明显的:在现实世界里,人们无法把一个试验无限地重复下去,因此我们无法精确地得到频率的稳定值.尽管有明显的缺点,但这种方法有其重要意义:频率具有稳定性这一客观规律给概率提供了经验和客观的背景,也给我们提供了一个可以想像的概率的具体值,以及概率作为事件发生可能性大小的度量的频率解释;对于可重复的随机现象,可以通过多次观察或试验用得到的频率给出概率的近似值,例如,工业生产中,依据抽检的一些产品的质量状态估计产品的废品率.

下面是频率稳定性的几个实例(见教材).

1.2.2概率的公理化定义

概率的频率定义实际上是给出了在一些具体场合确定概率近似值的一种方法.为了理论研究和理论发展的需要,我们需要给出概率的数学定义.为此，我们需要认清概率的数学本质和基本性质.

用以表征一个事件(即样本空间的一个子集)发生可能性大小的概率是事件对应的一个实数.我们暂且抛开概率的实际意义，而只从数学角度看,概率是事件到实数的一个映射.这个映射还需要满足一些基本要求.受概率的频率定义的启发,频率的性质也应该适用于概率. 频率具有许多性质,比如

(1) ;

(2) 

(3)若可列个事件……两两互不相容,则

.

人们经过研究,以上三条性质是基本性质,也就是说其他性质都可以这些基本性质推出.因此有下面的概率公理化定义,定义中明确了对概率的基本要求.

定义1.2.1 设试验的样本空间为,对于试验的任一事件赋予一个实数,记为,如果集合函数满足:

1. 非负性公理: 对于任一事件,有;
2. 规范性公理: ;
3. 可列可加性公理: 若可列个事件……互不相容,则

.

则对任一事件，其函数值称为事件的概率.

这个定义只涉及概率的最本质的数学性质：概率是实值集合（即事件）函数，只要这个函数满足上述三条公理,那么任意事件的函数值就称为的概率.对于具体的随机现象中给定的事件，其概率如何合理地确定是要依具体情况而定.历史上出现的概率的频率定义、古典定义和几何定义都是在特定的场合下有着各自确定概率的方法.在有了概率的公理化定义之后，我们可以把它们看作确定概率的方法是恰当的.确定概率的古典方法将在下一节介绍.

1.2.3 概率的性质

利用概率的定义，可以导出概率的一系列性质.这些性质及公理化定义中的三条公理形成了概率运算的基本法则,是概率计算的基础,下面逐个给出概率的一些常用性质.

概率的定义中要求必然事件的概率为1.那么凭经验可想到，不可能事件的概率应该是0，这个要求没有出现在公理化定义中是因为可以由定义导出.

性质1 .

证明 令,则,且,由概率的可列可加性得

,

由于是一个数,故.

由概率的可列可加性,可以想到概率也应满足有限可加性,这就是下面的性质2.

性质2 （有限可加性）若有限个事件互不相容，则

.

证明 令,那么互不相容, 由概率的可列可加性得

.

由有限可加性易得下面非常直观一条性质.

性质3 对任一事件,有

.

证明 由,,及性质2，可得,因此

.

下面的性质4和性质5给出了差事件的概率的计算公式. 性质4还说明了事件的概率一定是介于0和1之间.

性质4 若，则.

证明 由，知,且与互不相容,再由性质2,得

,

即得

.

推论(单调性)若，则.

这一性质称为概率的单调性.由概率的单调性可以看出对于任一事件,有.

性质5 对任意两事件，有

.

证明 对任意事件，有,且.由性质4得

.

概率的有限可加性或可列可加性要求诸事件之间两两互不相容.而对于一般的多个事件的和事件的概率如何求呢?下面性质回答了这个问题.

性质6 （加法公式）对任意两事件，有

.

证明 对任意两事件，有,且与互不相容,从而

,

即.

这一性质可推广至任意有限个事件的情形：对任意的个事件,有



.

特别,对于三个事件,有

.

下面用归纳法证明以上公式.

证明 时已得到证明.假设公式对于个事件成立,那么对于个事件，有







.

例1.2.1 设为两事件，且，，

（1）若互不相容，求，;

（2）若，求，;

（3）若，求,.

解 (1)由于互不相容,因此

,

.

(2) 由于,因此

,

.

(3) 由,得

,

从而,因此

,

.

例1.2.2 设为三个事件，且，，，求

（1）中至少有一个发生的概率；

（2）中至少有两个发生的概率;

(3) 中恰有一个发生的概率.

解 （1）



.

（2）



（3）事件“中恰有一个发生”等于事件“中至少有一个发生”与事件“中至少有两个发生”的差,所以事件“中恰有一个发生”的概率为

.

求事件“中恰有一个发生”的概率可以有另一种做法.

事件“中恰有一个发生”可表示为,而事件两两互不不相容,并且









,

,,所以事件“中恰有一个发生”的概率为

.